

Vektorrechnung:

$$\text{Betrag (Länge): } |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \text{ dann gilt } \begin{cases} a_x = |\vec{a}| \cdot \cos(\alpha) \\ a_y = |\vec{a}| \cdot \sin(\alpha) \end{cases}$$

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos(\alpha); a_y = |\vec{a}| \cdot \sin(\alpha)$$

$$\vec{F}_1 = |\vec{F}_1| \cdot \begin{cases} \cos \angle \vec{F}_1 \cdot \vec{e}_x \\ \sin \angle \vec{F}_1 \cdot \vec{e}_x \end{cases}$$

$$\text{Einheitsvektor: } \vec{e} = \frac{\vec{F}_1}{|\vec{F}_1|}$$

Addition u. Subtraktion von Vektoren:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einem Skalar:

$$\vec{a} \cdot c = c \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \cdot c \\ a_y \cdot c \\ a_z \cdot c \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle \vec{a}, \vec{b}), \text{ oder } \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_1}{|\vec{a}| \cdot |\vec{e}_1|}, \text{ oder } \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Kreuzprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \Rightarrow \perp$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

PQ-Formel:

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Binomische Formeln:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Komplexe Zahlen:

Form: $a + ib$ a =Realteil b =Imaginärteil

$$i = \sqrt{-1} \quad i^2 = (-1)$$

$$\tan \varphi = \frac{b}{a} = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} \quad \text{es sei } z = a + ib \quad \varphi = \arctan \frac{b}{a}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

z entspricht auch dem Vektor z.B. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Darstellung in der Gaußebene (Polarform):

$$z = |z| \cdot \{ \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi \} \quad \rightarrow \{ \text{Abkürzung: } |z| e^{i\varphi} \}$$

$$e^{i\varphi} = (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

die n -te Wurzel aus einer komplexen Zahl:

$$z = |z| e^{i\varphi} \rightarrow z^{1/n} \rightarrow \sqrt[n]{z} \rightarrow |z|^{1/n} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi + 2\pi \cdot k}{n}\right)} \quad \text{mit } k=0,1,2,\dots,n-1$$

$$\rightarrow \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi + 360^\circ \cdot k}{n}\right)} \quad \text{mit } k=0,1,2,\dots,n-1$$

x, y	φ (in Bogenmaß)
$x > 0, y \geq 0$	$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$
$x < 0, y \geq 0$	$\varphi = \arctan \frac{y}{x} + \pi$
$x < 0, y \leq 0$	$\varphi = \arctan \frac{y}{x} + \pi$
$x > 0, y \leq 0$	$\varphi = \arctan \frac{y}{x} + 2\pi$
$x = 0, y > 0$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$
$x = 0, y < 0$	$\varphi = \frac{3}{2}\pi$
$x = 0, y = 0$	$\varphi = 0$

Mengen und Zahlenarten

Die Menge

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

heißt Schnitt von der Menge A und B.

Die Menge

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } B\}$$

heißt Vereinigung aus den Mengen A und B.

Die Menge

$$A / B = \{x \mid x \in A, \text{ aber } x \notin B\}$$

heißt Differenz von A und B. Man bezeichnet sie als A ohne B.

A; B und C seien Mengen, dann gilt:

- Kommutativgesetze:

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

- Assoziativgesetze:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

- Distributivgesetze:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A / (B \cap C) = (A / B) \cup (A / C)$$

$$A / (B \cup C) = (A / B) \cap (A / C)$$

Zahlenarten:

Natürliche Zahlen:

$$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots\}$$

Ganze Zahlen:

$$\mathbb{Z} = \{\dots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3 \dots\}$$

Rationale Zahlen:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{Z} / \{0\} \right\}$$

Bem: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$